Théorème de Perron-Frobenius
(version allégée)

Théorème

A. Si A est une matrice carrée non-négative indécomposable,
   1. $\lambda^* > 0$ [valeur propre dominante de A]
   2. $|\lambda^*| = \sup(|\lambda_1|, |\lambda_1|, \ldots)$
   3. $x^* > 0$ [x^* = vecteur propre de A associé à λ^*]
   4. λ^* est une fonction continue croissante de a_{ij}

      $\Rightarrow$ si B est une sous-matrice de A, $\lambda^*(B) < \lambda^*(A)$

      $\Rightarrow$ λ^* est racine simple de $|\lambda I - A| = 0$
   5. Un vecteur propre x^i associé à $\lambda_i \neq \lambda^*$ comporte au moins un élément négatif
   6. Soit $\mu = 1/\nu > 0$

      $\mu > \lambda^*$ (ou $\nu < 1/\lambda^*$) $\Rightarrow$ $(\mu I - A)^{-1} > 0$

      $(I - \nu A)^{-1} > 0$
   7. $\sup_j \Sigma_i a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_j \Sigma_i a_{ij}$

      $\sup_i \Sigma_j a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_i \Sigma_j a_{ij}$

B. Si A est une matrice carrée non-négative décomposable,
   1. $\lambda^* \geq 0$
   2. $|\lambda^*| = \sup(|\lambda_1|, |\lambda_1|, \ldots)$
   3. $x^* \geq 0$
   4. λ^* est une fonction continue non décroissante de a_{ij}

      $\Rightarrow$ si B est une sous-matrice de A, $\lambda^*(B) \leq \lambda^*(A)$
   5. Soit $\mu = 1/\nu > 0$

      $\mu > \lambda^*$ (ou $\nu < 1/\lambda^*$) $\Rightarrow$ $(\mu I - A)^{-1} \geq 0$

      $(I - \nu A)^{-1} \geq 0$
   6. $\sup_j \Sigma_i a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_j \Sigma_i a_{ij}$

      $\sup_i \Sigma_j a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_i \Sigma_j a_{ij}$