Théorème de Perron-Frobenius
(version allégée)

Théorème

A. Si A est une matrice carrée non-négative indécomposable,

1. $\lambda^* > 0$ [valeur propre dominante de A]
2. $|\lambda^*| = \sup(|\lambda_1|, |\lambda_1|, \ldots)$
3. $x^* > 0$ [x^* = vecteur propre de A associé à λ^*]
4. λ^* est une fonction continue croissante de a_{ij}

   $\Rightarrow$ si B est une sous-matrice de A, $\lambda^*(B) < \lambda^*(A)$

   $\Rightarrow$ λ^* est racine simple de $|\lambda I - A| = 0$
5. Un vecteur propre x^i associé à $\lambda_i \neq \lambda^*$ comporte au moins un élément négatif
6. Soit $\mu = 1/\nu > 0$

   $\mu > \lambda^*$ (ou $\nu < 1/\lambda^*$) $\Rightarrow$ $(\mu I - A)^{-1} > 0$

   $(I - \nu A)^{-1} > 0$
7. $\sup_j \Sigma_i a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_j \Sigma_i a_{ij}$

   $\sup_i \Sigma_j a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_i \Sigma_j a_{ij}$

B. Si A est une matrice carrée non-négative décomposable,

1. $\lambda^* \geq 0$
2. $|\lambda^*| = \sup(|\lambda_1|, |\lambda_1|, \ldots)$
3. $x^* \geq 0$
4. λ^* est une fonction continue non décroissante de a_{ij}

   $\Rightarrow$ si B est une sous-matrice de A, $\lambda^*(B) \leq \lambda^*(A)$
5. Soit $\mu = 1/\nu > 0$

   $\mu > \lambda^*$ (ou $\nu < 1/\lambda^*$) $\Rightarrow$ $(\mu I - A)^{-1} \geq 0$

   $(I - \nu A)^{-1} \geq 0$
6. $\sup_j \Sigma_i a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_j \Sigma_i a_{ij}$

   $\sup_i \Sigma_j a_{ij} \geq \lambda^* \geq \inf_i \Sigma_j a_{ij}$